Том 27, № 139 2022

DOI 10.20310/2686-9667-2022-27-139-231-246
УДК 517.956.4

Нелокальная задача с интегральным условием для параболического уравнения с оператором Бесселя

Ильнур Бурханович ГАРИПОВ, Ринат Мизхатович МАВЛЯВИЕВ
ФГАОУ ВО «Казанский (Приволжский) федеральный университет»
420008, Российская Федерация, г. Казань, ул. Кремлевская, 18

Аннотация. Для параболического уравнения с оператором Бесселя

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{k}{x}\frac{\partial u}{\partial x}$$

в прямоугольной области $0 < x < l, \;\; 0 < t \le T$ рассматривается краевая задача с нелокальным интегральным условием первого рода

$$\int\limits_0^l u(x,t)\,x\,dx = 0, \quad 0 \le t \le T.$$

Эта задача сводится к эквивалентной краевой задаче со смешанными краевыми условиями первого и третьего рода. Показано, что однородная эквивалентная краевая задача имеет только тривиальное нулевое решение, а следовательно, исходная неоднородная задача не может иметь более одного решения. В этом доказательстве используется лемма Гронуолла. Затем методом спектрального анализа доказана теорема существования решения эквивалентной задачи. Это решение определяется явно в виде ряда Дини. Получены достаточные условия относительно начального условия, которые гарантируют сходимость построенного ряда в классе регулярных решений.

Ключевые слова: параболическое уравнение, оператор Бесселя, существование и единственность решения краевой задачи

Для цитирования: *Гарипов И.Б., Мавлявиев Р.М.* Нелокальная задача с интегральным условием для параболического уравнения с оператором Бесселя // Вестник российских университетов. Математика. 2022. Т. 27. № 139. С. 231–246. DOI 10.20310/2686-9667-2022-27-139-231-246.

DOI 10.20310/2686-9667-2022-27-139-231-246

Non-local problem with an integral condition for a parabolic equation with a Bessel operator

Ilnur B. GARIPOV, Rinat M. MAVLYAVIEV
Kazan (Volga Region) Federal University
18, Kremlyovskaya St., Kazan 420008, Russian Federation

Abstract. For the parabolic equation with the Bessel operator

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{k}{x}\frac{\partial u}{\partial x}$$

in the rectangular domain $0<x<l,\ \ 0<t\leq T,$ we consider a boundary value problem with the non-local integral condition of the first kind

$$\int\limits_0^l u(x,t)\,x\,dx=0,\quad 0\leq t\leq T.$$

This problem is reduced to an equivalent boundary value problem with mixed boundary conditions of the first and third kind. It is shown that the homogeneous equivalent boundary value problem has only a trivial zero solution, and hence the original inhomogeneous problem cannot have more than one solution. This proof uses Gronwall's lemma. Then, by the method of spectral analysis, the existence theorem for a solution to an equivalent problem is proved. This solution is defined explicitly in the form of a Dini series. Sufficient conditions with respect to the initial condition are obtained. These conditions guarantee the convergence of the constructed series in the class of regular solutions.

Keywords: parabolic equation, Bessel operator, existence and uniqueness of a solution to a boundary value problem

Mathematics Subject Classification: 35K10, 35K20.

For citation: Garipov I.B., Mavlyaviev R.M. Nelokal'naya zadacha s integral'nym usloviyem dlya parabolicheskogo uravneniya s operatorom Besselya [Non-local problem with an integral condition for a parabolic equation with a Bessel operator]. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika – Russian Universities Reports. Mathematics*, 2022, vol. 27, no. 139, pp. 231–246. DOI 10.20310/2686-9667-2022-27-139-231-246. (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

Нелокальные задачи с интегральными условиями используют для описания различных физических явлений в случае, когда граница области протекания процесса недоступна для непосредственного измерения. Такие задачи возникают, например, при исследовании процессов распространения тепла [1, 2], диффузии частиц в турбулентной плазме [3], влагопереноса в капиллярно-пористых средах [4].

Одними из первых работ, посвященных исследованию задач с интегральными условиями для уравнений в частных производных параболического типа, были работы Дж. Кэннона (J.R. Cannon) [1] и Л. И. Камынина [5]. Исследования параболических задач с интегральными условиями были продолжены в работах Н. И. Ионкина [2], Н. И. Юрчука [6, 7], Л. А. Муравья и А. В. Филиновского [8, 9], А. И. Кожанова [10], A. Bouziani и S. Mesloub [11–13]. Исследования смешанных задач с интегральными условиями для уравнений гиперболического типа проводились в работах Л. С. Пулькиной [14–16], С. А. Бейлина [17], Н. В. Зайцевой [18]. В работах К. Б. Сабитова [19, 20] исследованы краевые задачи для уравнений смешанного типа в прямоугольной области с нелокальным интегральным условием.

В настоящей работе рассматривается параболическое уравнение

$$L_B u \equiv u_t - B_x u = 0,$$

с оператором Бесселя

$$B_x = x^{-k}\frac{\partial}{\partial x}(x^k\frac{\partial}{\partial x}) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{k}{x}\frac{\partial}{\partial x}, \quad 0 < k < 1,$$

в прямоугольной области $G_T = \{(x,t):\ 0 < x < l,\ 0 < t \le T\}$ координатной плоскости Oxt.

1. Постановка задачи

Обозначим $\overline{G}_T = \{(x,t):\ 0 \le x \le l,\ 0 \le t \le T\}$, $G_{lT} = \{(x,t):\ 0 < x \le l,\ 0 \le t \le T\}$ и рассмотрим следующую краевую задачу.

Задача. Найти функцию $u(x,t)$, удовлетворяющую условиям:

$$u(x,t) \in C(\overline{G}_T) \cap C^1_x(G_{lT}) \cap C^{2,1}_{x,t}(G_T), \tag{1.1}$$

$$L_B u = 0, \quad (x,t) \in G_T, \tag{1.2}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad 0 \le x \le l, \tag{1.3}$$

$$u(0,t) = 0, \quad 0 \le t \le T, \tag{1.4}$$

$$\int\limits_0^l u(x,t)\,x\,dx = 0, \quad 0 \le t \le T, \tag{1.5}$$

где $\varphi(x)$ – заданная достаточно гладкая функция, удовлетворяющая условию согласования

$$\int\limits_0^l \varphi(x)\,x\,dx = 0. \tag{1.6}$$

Следующее утверждение позволяет заменить в рассматриваемой задаче интегральное условие (1.5) граничным условием

$$lu_x(l,t)+(k-1)u(l,t)=0, \quad 0\le t\le T. \tag{1.7}$$

Лемма 1.1. *Если выполняется условие согласования* (1.6), *то задачи* (1.1)–(1.5) *и* (1.1)–(1.4), (1.7) *эквивалентны.*

Доказательство. Пусть $u(x,t)$ — решение задачи (1.1)–(1.5). Дифференцируя уравнение (1.5) один раз по t, получаем

$$\int_0^l u_t(x,t)\,x\,dx=0. \tag{1.8}$$

Умножим уравнение (1.2) на x и проинтегрируем при фиксированном $t\in(0,T)$ по переменной x на промежутке от ε до $l-\varepsilon$, где $\varepsilon>0$ – достаточно малое число. В результате получаем

$$\int_\varepsilon^{l-\varepsilon} u_t(x,t)\,x\,dx=\int_\varepsilon^{l-\varepsilon} B_x u(x,t)\,x\,dx. \tag{1.9}$$

Так как

$$\int_\varepsilon^{l-\varepsilon} B_x u(x,t)\,x\,dx=\int_\varepsilon^{l-\varepsilon}\left(u_{xx}(x,t)+\frac{k}{x}u_x(x,t)\right)x\,dx=\int_\varepsilon^{l-\varepsilon}\Big(xu_{xx}(x,t)+ku_x(x,t)\Big)dx$$
$$=\int_\varepsilon^{l-\varepsilon}\frac{\partial}{\partial x}\Big(xu_x(x,t)+(k-1)u(x,t)\Big)dx=\Big(xu_x(x,t)+(k-1)u(x,t)\Big)\Big|_\varepsilon^{l-\varepsilon},$$

из (1.9) следует

$$\int_\varepsilon^{l-\varepsilon} u_t(x,t)\,x\,dx=(l-\varepsilon)u_x(l-\varepsilon,t)+(k-1)u(l-\varepsilon,t)-\varepsilon u_x(\varepsilon,t)+(k-1)u(\varepsilon,t).$$

Переходя в этом равенстве к пределу при $\varepsilon\to 0$, получаем

$$\int_0^l u_t(x,t)\,x\,dx=lu_x(l,t)+(k-1)u(l,t). \tag{1.10}$$

Таким образом, на основании (1.8),

$$lu_x(l,t)+(k-1)u(l,t)=0.$$

Пусть теперь $u(x,t)$ — решение задачи (1.1)–(1.4), (1.7). Из равенства (1.10) и из условия (1.7) следует, что

$$\int_0^l u_t(x,t)\,x\,dx=0, \quad 0\le t\le T. \tag{1.11}$$

Интегрируя равенство (1.11) по t, получаем

$$\int_0^l u(x,t)\,x\,dx = \mathrm{const}(t) = c.$$

Полагая здесь $t=0$, с учетом условия (1.3) и условия согласования (1.6), получаем $c=0$. Следовательно, выполняется условие (1.5). □

2. Единственность решения

Теорема 2.1. *Задача* (1.1)–(1.6) *не может иметь более одного решения.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть существуют два решения $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$ задачи (1.1)–(1.6). Тогда их разность $v(x,t)=u_1(x,t)-u_2(x,t)$ будет являться решением следующей однородной краевой задачи

$$v(x,t)\in C(\overline{G}_T)\cap C^1_x(G_{lT})\cap C^{2,1}_{x,t}(G_T),$$

$$L_B v = 0, \quad (x,t)\in G_T, \tag{2.1}$$

$$v(x,0)=0, \quad 0\le x\le l, \tag{2.2}$$

$$v(0,t)=0, \quad 0\le t\le T, \tag{2.3}$$

$$\int_0^l v(x,t)x\,dx = 0, \quad 0\le t\le T. \tag{2.4}$$

Будем использовать следующее тождество

$$2xv(x,t)L_Bv(x,t) = \big(xv^2(x,t)\big)'_t - \Big(2xv(x,t)v_x(x,t)+(k-1)v^2(x,t)\Big)'_x + 2xv_x^2(x,t),$$

справедливость которого можно проверить непосредственным дифференцированием.

Поскольку функция v удовлетворяет уравнению (2.1), имеем

$$\big(xv^2(x,t)\big)'_t - \Big(2xv(x,t)v_x(x,t)+(k-1)v^2(x,t)\Big)'_x + 2xv_x^2(x,t) = 0.$$

Отсюда получаем

$$\int_0^l\int_0^t \big(xv^2(x,\tau)\big)'_\tau\,d\tau dx - \int_0^l\int_0^t \Big(2xv(x,\tau)v_x(x,\tau)+(k-1)v^2(x,\tau)\Big)'_x d\tau dx + 2\int_0^l\int_0^t xv_x^2(x,\tau)d\tau dx = 0. \tag{2.5}$$

Из начального условия (2.2) следует, что

$$\int_0^l\int_0^t \big(xv^2(x,\tau)\big)'_\tau\,d\tau dx = \int_0^l xv^2(x,t)dx.$$

Из краевых условий (2.3), (2.4) и на основании леммы 1.1 получаем

$$\int\limits_0^l\int\limits_0^t\Big(2xv(x,\tau)v_x(x,\tau)+(k-1)v^2(x,\tau)\Big)_x'd\tau dx=\int\limits_0^t\int\limits_0^l\Big(2xv(x,\tau)v_x(x,\tau)+(k-1)v^2(x,\tau)\Big)_x'dxd\tau$$
$$=\int\limits_0^t\Big(2lv(l,\tau)v_x(l,\tau)+(k-1)v^2(l,\tau)\Big)d\tau=\int\limits_0^t\Big(-2(k-1)v^2(l,\tau)+(k-1)v^2(l,\tau)\Big)d\tau$$
$$=(1-k)\int\limits_0^t v^2(l,\tau)d\tau.$$

Таким образом, равенство (2.5) принимает вид

$$\int\limits_0^l xv^2(x,t)dx+2\int\limits_0^t\int\limits_0^l xv_x^2(x,\tau)dx=(1-k)\int\limits_0^t v^2(l,\tau)d\tau. \tag{2.6}$$

Имеем очевидные равенства

$$v^2(l,\tau)=\frac{1}{l^2}\int\limits_0^l\left(x^2v^2(x,\tau)\right)_x'dx=\frac{1}{l^2}\int\limits_0^l\Big(2xv^2(x,\tau)+2x^2v(x,\tau)v_x(x,\tau)\Big)dx$$
$$=\frac{2}{l^2}\int\limits_0^l xv^2(x,\tau)dx+\frac{2}{l^2}\int\limits_0^l x^{\frac{3}{2}}v(x,\tau)x^{\frac{1}{2}}v_x(x,\tau)dx,$$

из которых для любого $\varepsilon>0$ следует

$$v^2(l,\tau)\le\frac{2}{l^2}\int\limits_0^l xv^2(x,\tau)dx+\frac{2}{l^2}\int\limits_0^l\left(\varepsilon xv_x^2(x,\tau)+\frac{1}{4\varepsilon}x^3v^2(x,\tau)\right)dx$$
$$=\frac{2}{l^2}\int\limits_0^l xv^2(x,\tau)dx+\frac{2\varepsilon}{l^2}\int\limits_0^l xv_x^2(x,\tau)dx+\frac{1}{2l^2\varepsilon}\int\limits_0^l x^3v^2(x,\tau)dx$$
$$\le\frac{2\varepsilon}{l^2}\int\limits_0^l xv_x^2(x,\tau)dx+\frac{2}{l^2}\int\limits_0^l xv^2(x,\tau)dx+\frac{1}{2l^2\varepsilon}l^2\int\limits_0^l xv^2(x,\tau)dx$$
$$=\frac{2\varepsilon}{l^2}\int\limits_0^l xv_x^2(x,\tau)dx+\left(\frac{2}{l^2}+\frac{1}{2\varepsilon}\right)\int\limits_0^l xv^2(x,\tau)dx$$

(здесь использовалось неравенство $|pq|\le\varepsilon p^2+\dfrac{1}{4\varepsilon}q^2$, очевидно справедливое при любых действительных числах p,q). Следовательно, при $\varepsilon=\dfrac{l^2}{1-k}$ из (2.6) получаем

$$\int\limits_0^l xv^2(x,t)dx\le\frac{(1-k)(5-k)}{2l^2}\int\limits_0^t\int\limits_0^l xv^2(x,\tau)dxdt.$$

Применяя лемму Гронуолла для функции $z(t) = \int\limits_0^l xv^2(x,t)dx$, получаем

$$\int\limits_0^l xv^2(x,t)dx = 0, \quad 0 \le t \le T.$$

А так как как функция $v(x,t)$ непрерывна, то

$$v(x,t) \equiv 0.$$

Отсюда следует, что $u_1(x,t) \equiv u_2(x,t)$. □

3. Существование решения

Для доказательства существования решения задачи (1.1)–(1.5) достаточно доказать существование решения задачи (1.1)–(1.4), (1.7).

Согласно методу Фурье, частные решения уравнения (1.2) ищем в виде

$$u(x,t) = X(x)T(t), \tag{3.1}$$

где $X(x)$ и $T(t)$ — пока неопределенные функции. Подставляя функцию (3.1) в уравнение (1.2), получаем

$$T' + \lambda^2 T = 0, \tag{3.2}$$

$$X'' + \frac{k}{x}X' + \lambda^2 X = 0. \tag{3.3}$$

Чтобы частное решение (3.1), отличное от тождественного нуля, удовлетворяло граничным условиям (1.4) и (1.7), необходимо потребовать выполнение условий

$$X(0) = 0, \quad lX'(l) + (k-1)X(l) = 0. \tag{3.4}$$

Известно (см. [21, гл. IV]), что уравнение (3.3) с помощью замены переменных по формулам

$$X = \left(\frac{z}{\lambda}\right)^{\frac{1-k}{2}} Z, \quad x = \frac{z}{\lambda}, \tag{3.5}$$

приводится к уравнению Бесселя

$$z^2 Z'' + zZ' + \left(z^2 - \frac{(k-1)^2}{4}\right) Z = 0,$$

общим решением которого является функция

$$Z(z) = C_1 J_{\frac{k-1}{2}}(z) + C_2 J_{-\frac{k-1}{2}}(z), \tag{3.6}$$

где $J_{\frac{k-1}{2}}(z)$, $J_{-\frac{k-1}{2}}(z)$ — бесселевы функции первого рода порядка $\frac{k-1}{2}$ и $-\frac{k-1}{2}$ соответственно. Возвращаясь к старым переменным в функции (3.6), с учетом формул (3.5), получаем

$$X(x) = C_1 X_1(x) + C_2 X_2(x), \quad X_1(x) = x^{-\frac{k-1}{2}} J_{\frac{k-1}{2}}(\lambda x), \quad X_2(x) = x^{-\frac{k-1}{2}} J_{-\frac{k-1}{2}}(\lambda x), \tag{3.7}$$

где C_1, C_2 и λ — произвольные постоянные. Их найдем из требования, чтобы общее решение (3.7) удовлетворяло условиям (3.4).

Подставим $X(t)$ в (3.4). Имеем

$$X'(x) = -C_1\lambda\, x^{-\frac{k-1}{2}} J_{\frac{k+1}{2}}(\lambda x) + C_2\lambda\, x^{-\frac{k-1}{2}} J_{-\frac{k+1}{2}}(\lambda x)\,.$$

Из представления функций Бесселя в виде ряда видно, что для $0 < k < 1$ при $x \to 0$ функция $X_1(x)$ остается ограниченной, тогда как значение $X_2(0) = 0$. Поэтому положим $C_1 = 0$ и $C_2 = 1$. В результате получаем частное решение

$$X(x) = x^{-\frac{k-1}{2}} J_{-\frac{k-1}{2}}(\lambda x)\,. \tag{3.8}$$

Подставляя функцию (3.8) во второе граничное условие (3.4), получаем уравнение

$$\lambda l J_{-\frac{k+1}{2}}(\lambda l) + (k-1) J_{-\frac{k-1}{2}}(\lambda l) = 0. \tag{3.9}$$

Используя формулу

$$J_{\nu-1}(z) = \frac{\nu}{z} J_\nu(z) + J'_\nu(z),$$

запишем уравнение (3.9) в виде

$$\lambda l J'_{-\frac{k-1}{2}}(\lambda l) + \frac{k-1}{2} J_{-\frac{k-1}{2}}(\lambda l) = 0. \tag{3.10}$$

Уравнение (3.10) имеет бесчисленное множество вещественных корней (см. [22, гл. IV, §4]). Обозначим через μ_n, $n = 1, 2, \ldots,$ корни уравнения

$$\mu J'_{-\frac{k-1}{2}}(\mu) + \frac{k-1}{2} J_{-\frac{k-1}{2}}(\mu) = 0.$$

Тогда получаем собственные значения $\lambda_n = \frac{\mu_n}{l}$, $n = 1, 2, \ldots,$ задачи (3.3), (3.4).

Согласно формуле

$$J_{\nu+1}(z) = \frac{\nu}{z} J_\nu(z) - J'_\nu(z),$$

имеет место равенство

$$\mu J'_{-\frac{k-1}{2}}(\mu) + \frac{k-1}{2} J_{-\frac{k-1}{2}}(\mu) = J_{-\frac{k-3}{2}}(\mu)\,.$$

Следовательно, для решений уравнения (3.10) для больших n справедлива асимптотическая формула

$$\mu_n = \lambda_n l = \pi n - \frac{\pi}{4} k + \frac{\pi}{2} + O(n^{-1}).$$

Заметим, что при $\lambda_0 = 0$ спектральная задача (3.3), (3.4) имеет собственную функцию $X_0 = x^{1-k}$. Таким образом, получены следующие собственные функции задачи (3.3)–(3.4):

$$X_0(x) = x^{1-k}, \quad X_n(x) = x^{-\frac{k-1}{2}} J_{-\frac{k-1}{2}}\left(\frac{\mu_n}{l} x\right), \quad n = 1, 2, \ldots\,. \tag{3.11}$$

Лемма 3.1. *Функции* (3.11) *попарно ортогональны с весом* x^k *и образуют полную систему.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем ортогональность с весом (определение см. в [23, с. 166]) функций (3.11). Обозначим $\delta_{nm} = \begin{cases} 1, & n = m, \\ 0, & n \neq m, \end{cases}$ (символ Кронекера). Имеем

$$\int\limits_0^l X_n(x)X_m(x)x^k dx$$

$$= \int\limits_0^l x^{-\frac{k-1}{2}} J_{-\frac{k-1}{2}}\left(\frac{\mu_n}{l}x\right) x^{-\frac{k-1}{2}} J_{-\frac{k-1}{2}}\left(\frac{\mu_m}{l}x\right) x^k dx = \int\limits_0^l J_{-\frac{k-1}{2}}\left(\frac{\mu_n}{l}x\right) J_{-\frac{k-1}{2}}\left(\frac{\mu_m}{l}x\right) x dx$$

$$= \delta_{nm}\frac{l^2}{2}\Big(\big(J'_{-\frac{k-1}{2}}(\mu_n)\big)^2 + \big(1 - \frac{(k-1)^2}{4\mu_n^2}\big)J^2_{-\frac{k-1}{2}}(\mu_n)\Big) = \delta_{nm}\frac{l^2}{2}J^2_{-\frac{k-1}{2}}(\mu_n), \quad n, m \neq 0, \quad (3.12)$$

$$\int\limits_0^l X_0(x)X_n(x)x^k dx = \begin{cases} \int\limits_0^l x^{1-k}x^{-\frac{k-1}{2}} J_{-\frac{k-1}{2}}\left(\frac{\mu_n}{l}x\right) x^k dx, & n \neq 0; \\ \int\limits_0^l x^{1-k}x^{1-k}x^k dx, & n = 0, \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \int\limits_0^l x^{-\frac{k-1}{2}+1} J_{-\frac{k-1}{2}}\left(\frac{\mu_n}{l}x\right) dx, & n \neq 0; \\ \int\limits_0^l x^{2-k} dx, & n = 0, \end{cases} = \begin{cases} 0, & n \neq 0; \\ \frac{l^{3-k}}{3-k}, & n = 0. \end{cases} \quad (3.13)$$

Докажем полноту системы (3.11). Предположим, что существует функция $\nu(x)$, отличная от тождественного нуля и ортогональная всем функциям (3.11), т. е.

$$\int\limits_0^l x^{1-k}\nu(x)dx = 0, \quad \int\limits_0^l x^{-\frac{k-1}{2}} J_{-\frac{k-1}{2}}\left(\frac{\mu_n}{l}x\right)\nu(x)dx = 0, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Эти равенства запишем в виде

$$\int\limits_0^l x^{-\frac{k-1}{2}}x^{-\frac{k-1}{2}}\nu(x)dx = 0, \quad \int\limits_0^l J_{-\frac{k-1}{2}}\left(\frac{\mu_n}{l}x\right) x^{-\frac{k-1}{2}}\nu(x)dx = 0, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Так как система

$$x^{-\frac{k-1}{2}}, \quad J_{-\frac{k-1}{2}}\left(\frac{\mu_1}{l}x\right), \quad J_{-\frac{k-1}{2}}\left(\frac{\mu_2}{l}x\right), \quad \ldots, \quad J_{-\frac{k-1}{2}}\left(\frac{\mu_n}{l}x\right), \quad \ldots,$$

полна в $L_2(0, l)$ (см. [21, гл. VIII]), получаем

$$x^{-\frac{k-1}{2}}\nu(x) = 0,$$

что выполнимо лишь для функции $\nu(x)$, равной нулю почти всюду на $(0, l)$. Это и доказывает полноту системы (3.11). □

Отметим, что аналогично [24, гл. VIII, §14] для функций (3.11) можно доказать существование при любых k, l чисел $M(k,l)$ и $N(k,l)$ таких, что справедливы следующие неравенства

$$\frac{M(k,l)}{\mu_n} \le \int\limits_0^l X_n^2(x)x^k dx \le \frac{N(k,l)}{\mu_n}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots .$$

Значениям параметра $\lambda = \lambda_n, \ n = 0, 1, 2, \ldots,$ соответствуют следующие решения уравнения (3.2)

$$T_n(t) = A_n e^{-\lambda_n^2 t},$$

где A_n — произвольные постоянные. Итак, все функции

$$u_0(x,t) = X_0(x)T_0(t) = A_0 x^{1-k},$$
$$u_n(x,t) = X_n(x)T_n(t) = A_n x^{-\frac{k-1}{2}} J_{-\frac{k-1}{2}}\left(\frac{\mu_n}{l}x\right) e^{-\left(\frac{\mu_n}{l}\right)^2 t}, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

удовлетворяют уравнению (1.2) и граничным условиям (1.4) и (1.7) при любых постоянных $A_n, \ n = 0, 1, 2, \ldots .$

Определим ряд

$$u(x,t) = A_0 x^{1-k} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n x^{-\frac{k-1}{2}} J_{-\frac{k-1}{2}}\left(\frac{\mu_n}{l}x\right) e^{-\left(\frac{\mu_n}{l}\right)^2 t}. \tag{3.14}$$

Требуя выполнения начального условия (1.3), получаем

$$u(x,0) = \varphi(x) = A_0 x^{1-k} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n x^{-\frac{k-1}{2}} J_{-\frac{k-1}{2}}\left(\frac{\mu_n}{l}x\right). \tag{3.15}$$

Умножая равенство (3.14) на x, затем на $x^{\frac{k+1}{2}} J_{-\frac{k-1}{2}}\left(\frac{\mu_n}{l}x\right)$, и каждый раз интегрируя по отрезку $[0,l]$, с учетом формул (3.12), (3.13), получаем

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{3-k}{l^{3-k}} \int\limits_0^l \varphi(x)x\,dx, \\ A_n &= \frac{1}{\frac{l^2}{2} J^2_{-\frac{k-1}{2}}(\mu_n)} \int\limits_0^l \varphi(x) x^{\frac{k+1}{2}} J_{-\frac{k-1}{2}}\left(\frac{\mu_n}{l}x\right)dx, \quad n = 1, 2, \ldots . \end{aligned} \tag{3.16}$$

Соотношение (3.15) представляет собою разложение функции $\varphi(x)$ в ряд Дини (см. [24]) по функциям (3.11) на отрезке $[0,l]$. Коэффициенты данного ряда вычисляются по формулам (3.16).

Теорема 3.1. *Если функция* $\varphi(x) \in C^4[0,l]$ *удовлетворяет условиям* $\varphi(0) = \varphi'(0) = \varphi''(0) = \varphi'''(0) = 0, \ l\varphi'(l) + (k-1)\varphi(l) = 0, \ l\varphi''(l) + k\varphi'(l) = 0, \ l\varphi'''(l) + (k+1)\varphi''(l) = 0,$ *то существует единственное решение задачи* (1.2)–(1.5), *и оно определяется как сумма ряда* (3.14), *коэффициенты которого вычисляются по формулам* (3.16).

Доказательство. Сначала покажем, что ряд Дини (3.15) сходится абсолютно и равномерно на отрезке $[0,l]$ к функции $\varphi(x)$. При $0<k<1$ функции (3.11) ограничены в окрестности точки $x=0$. В силу асимптотической формулы

$$J_\nu(x)=O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$$

функция $x^{-\frac{k-1}{2}}J_{-\frac{k-1}{2}}(x)$ ограничена для больших x. Поэтому функция $x^{-\frac{k-1}{2}}J_{-\frac{k-1}{2}}(x)$ ограничена для всех x. Следовательно, при некотором L для всех n выполнено

$$|X_n(x)|\le L.$$

Коэффициенты ряда (3.15) вычисляются по формулам (3.16). Дважды применяя в них формулу интегрирования по частям, получаем

$$\begin{aligned}A_0=\frac{3-k}{l^{3-k}}\int\limits_0^l\varphi(x)x\,dx=\frac{3-k}{l^{3-k}}\int\limits_0^l\varphi(x)x^kX_0(x)\,dx=\frac{3-k}{l^{3-k}2(1-k)}\int\limits_0^l\varphi(x)\frac{d}{dx}\left(x^{k+2}X_0'(x)\right)dx\\
=\frac{3-k}{l^{3-k}(1-k)}\left(\varphi(x)x^{k+2}\,X_0'(x)\Big|_0^l-\int\limits_0^l\varphi'(x)x^{k+2}X_0'(x)\,dx\right)\\
=\frac{3-k}{l^{3-k}(1-k)}\left(\varphi(x)x^{k+2}X_0'(x)\Big|_0^l-\varphi'(x)x^{k+2}X_0(x)\Big|_0^l+\int\limits_0^l\left((k+2)x\varphi'(x)+x^2\varphi''(x)\right)x^kX_0(x)\,dx\right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}A_n=\frac{1}{\frac{l^2}{2}J^2_{-\frac{k-1}{2}}(\mu_n)}\int\limits_0^l\varphi(x)x^{\frac{k+1}{2}}J_{-\frac{k-1}{2}}\left(\frac{\mu_n}{l}x\right)dx=\frac{1}{\frac{l^2}{2}J^2_{-\frac{k-1}{2}}(\mu_n)}\int\limits_0^l\varphi(x)x^kX_n\left(x\right)dx\\
=-\frac{2}{\mu_n^2J^2_{-\frac{k-1}{2}}(\mu_n)}\int\limits_0^l\varphi(x)x^k\left(X_n''(x)+\frac{k}{x}X_n'(x)\right)dx=-\frac{2}{\mu_n^2J^2_{-\frac{k-1}{2}}(\mu_n)}\int\limits_0^l\varphi(x)\frac{d}{dx}\left(x^kX_n'(x)\right)dx\\
=-\frac{2}{\mu_n^2J^2_{-\frac{k-1}{2}}(\mu_n)}\left(\varphi(x)x^kX_n'\left(x\right)\Big|_0^l-\varphi'(x)x^kX_n\left(x\right)\Big|_0^l+\int\limits_0^l\left(\varphi''(x)+\frac{k}{x}\varphi'(x)\right)x^kX_n\left(x\right)dx\right),\\
n=1,2,\ldots\,.\end{aligned}$$

Из условий теоремы на основании (3.4) получаем

$$\begin{aligned}&\varphi(x)x^{k+2}\,X_0'(x)\Big|_0^l-\varphi'(x)x^{k+2}X_0(x)\Big|_0^l=\varphi(l)l^{k+1}lX_0'\left(l\right)-\varphi'(l)l^{k+2}X_0\left(l\right)\\
&=-\varphi(l)l^{k+1}(k-1)X_n\left(l\right)-\varphi'(l)l^{k+2}X_0\left(l\right)=-l^{k+1}X_0\left(l\right)\left(l\varphi'(l)+(k-1)\varphi(l)\right)=0,\\
&\varphi(x)x^kX_n'\left(x\right)\Big|_0^l-\varphi'(x)x^kX_n\left(x\right)\Big|_0^l=\varphi(l)l^{k-1}lX_n'\left(l\right)-\varphi'(l)l^kX_n\left(l\right)=\\
&=-\varphi(l)l^{k-1}(k-1)X_n\left(l\right)-\varphi'(l)l^kX_n\left(l\right)=-l^{k-1}X_n\left(l\right)\left(l\varphi'(l)+(k-1)\varphi(l)\right)=0.\end{aligned}$$

Таким образом,

$$A_0 = \frac{3-k}{l^{3-k}(1-k)} \int\limits_0^l \big((k+2)x\varphi'(x) + x^2\varphi''(x)\big)x^k X_0(x)\,dx,$$

$$A_n = -\frac{2}{\mu_n^2 J^2_{-\frac{k-1}{2}}(\mu_n)} \int\limits_0^l \Big(\varphi''(x) + \frac{k}{x}\varphi'(x)\Big)x^k X_n(x)\,dx, \quad n = 1, 2, \dots . \tag{3.17}$$

Из условий теоремы следует ограниченность функции $\frac{\varphi'(x)}{x}$. Следовательно,

$$|A_0| \le \frac{(3-k)M_0}{l^{3-k}(1-k)} \int\limits_0^l x^k X_0(x)\,dx, \quad |A_n| \le \frac{2M}{\mu_n^2 J^2_{-\frac{k-1}{2}}(\mu_n)} \int\limits_0^l x^k X_n(x)\,dx, \quad n = 1, 2, \dots,$$

и отсюда, применяя неравенство Коши–Буняковского, получаем

$$|A_0| \le \frac{(3-k)M_0 l^{\frac{k+1}{2}}}{l^{3-k}(1-k)\sqrt{k+1}} \Big(\int\limits_0^l x^k X_0^2(x)\,dx\Big)^{\frac12} = C_0,$$

$$|A_n| \le \frac{2Ml^{\frac{k+1}{2}}}{\mu_n^2 J^2_{-\frac{k-1}{2}}(\mu_n)\sqrt{k+1}} \Big(\int\limits_0^l x^k X_n^2(x)\,dx\Big)^{\frac12} \le \frac{C}{\mu_n^{\frac32}} \le \frac{C}{n^{\frac32}}, \quad n = 1, 2, \dots .$$

Так как функции (3.11) при $0 < k < 1$ ограничены на отрезке $0 \le x \le l$, то по теореме Вейерштрасса ряд (3.15) сходится абсолютно и равномерно на данном отрезке. А так как

$$0 < e^{-\left(\frac{\mu_n}{l}\right)^2 t} \le 1, \text{ при } t \ge 0, \tag{3.18}$$

то ряд (3.14) при $0 \le x \le l$, $t \ge 0$ также сходится абсолютно и равномерно. Поэтому функция $u(x,t)$ определяемая рядом (3.14) непрерывна в области $0 \le x \le l$, $t \ge 0$ и удовлетворяет начальным и граничным условиям.

Теперь покажем, что ряд, полученный из (3.14) почленным дифференцированием по x, также абсолютно и равномерно сходится в области $0 < x \le l$, $t \ge 0$. Формально будем сопоставлять такой ряд функции $u_x(x,t)$, т. е.

$$u_x(x,t) \leftrightarrow A_0 X_0'(x) + \sum_{n=1}^{\infty} A_n X_n'(x) e^{-\left(\frac{\mu_n}{l}\right)^2 t}. \tag{3.19}$$

Здесь

$$X_0'(x) = \big(x^{1-k}\big)' = (1-k)x^{-k},$$

$$X_n'(x) = \Big(x^{-\frac{k-1}{2}} J_{-\frac{k-1}{2}}\Big(\frac{\mu_n}{l}x\Big)\Big)' = \frac{\mu_n}{l} x^{-\frac{k-1}{2}} J_{-\frac{k+1}{2}}\Big(\frac{\mu_n}{l}x\Big).$$

Имеют место соотношения

$$|X_0'(x)| = (1-k)x^{-k} \le N_0 x^{-k},$$

$$|X_n'(x)| = \Big|\frac{\mu_n}{l} x^{-\frac{k-1}{2}} J_{-\frac{k+1}{2}}\Big(\frac{\mu_n}{l}x\Big)\Big| \le \frac{N\mu_n x^{-\frac{k-1}{2}}}{(\mu_n x)^{\frac12}} = N\mu_n^{\frac12} x^{-\frac{k}{2}}.$$

Применяя дважды формулу интегрирования по частям к интегралу (3.17) и учитывая условия теоремы, получаем

$$|A_n| \le \frac{C_1}{\mu_n^{\frac{5}{2}}} \le \frac{C_1}{n^{\frac{5}{2}}}, \quad n = 1, 2, \dots .$$

На основании неравенства (3.18) отсюда следует, что ряд (3.19) абсолютно и равномерно сходится в области $0 < x \le l$, $t \ge 0$ к функции $u_x(x,t)$.

Остается показать, что в области $0 < x < l$, $t > 0$ функция $u(x,t)$ удовлетворяет уравнению (1.2). Для этого достаточно показать, что ряды, полученные из (3.14) почленным дифференцированием по t один раз и по x два раза, также абсолютно и равномерно сходятся в области $0 < x < l$, $t > 0$. Рассмотрим эти ряды

$$u_t(x,t) \leftrightarrow -\sum_{n=1}^{\infty} A_n X_n(x) \left(\frac{\mu_n}{l}\right)^2 e^{-\left(\frac{\mu_n}{l}\right)^2 t}, \tag{3.20}$$

$$u_{xx}(x,t) \leftrightarrow A_0 X_0''(x) + \sum_{n=1}^{\infty} A_n X_n''(x) e^{-\left(\frac{\mu_n}{l}\right)^2 t}. \tag{3.21}$$

Так как функции $X_0(x)$, $X_n(x)$ являются решениями уравнения (3.4), имеем

$$|X_0''(x)| = \left|-\frac{k}{x} X_0'(x)\right| = \frac{k}{x} |X_0'(x)| \le N_0 x^{-k-1}.$$

$$|X_n''(x)| = \left|-\frac{k}{x} X_n'(x) - \lambda_n^2 X_n(x)\right| \le \frac{k}{x} |X_n'(x)| + \lambda_n^2 |X_n(x)| \le N \mu_n^{\frac{1}{2}} x^{-\frac{k+2}{2}} + \left(\frac{\mu_n}{l}\right)^2 L.$$

При $t \in [t_0, T]$, где $t_0 > 0$ — любое малое число, получаем

$$\left| -\sum_{n=1}^{\infty} A_n X_n(x) \left(\frac{\mu_n}{l}\right)^2 e^{-\left(\frac{\mu_n}{l}\right)^2 t}\right| \le L \sum_{n=1}^{\infty} |A_n| \left(\frac{\mu_n}{l}\right)^2 e^{-\left(\frac{\mu_n}{l}\right)^2 t_0} \le L \sum_{n=1}^{\infty} |A_n|,$$

$$\left| A_0 X_0''(x) + \sum_{n=1}^{\infty} A_n X_n''(x) e^{-\left(\frac{\mu_n}{l}\right)^2 t}\right| \le N_{01} + L_1 \sum_{n=1}^{\infty} |A_n| \left(\frac{\mu_n}{l}\right)^2 e^{-\left(\frac{\mu_n}{l}\right)^2 t_0} \le N_{01} + L_1 \sum_{n=1}^{\infty} |A_n|.$$

Здесь использовались неравенства

$$0 < \left(\frac{\mu_n}{l}\right)^2 e^{-\left(\frac{\mu_n}{l}\right)^2 t_0} < 1,$$

которые выполняются при всех достаточно больших n.

Из сходимостью ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |A_n|$ на основании признака Вейерштрасса следует абсолютная и равномерная сходимость рядов (3.20), (3.21) при $t \ge t_0 > 0$. Поэтому ряд (3.15) можно дифференцировать почленно один раз по t и два раза по x при $t \ge t_0$. В силу произвольности $t_0 > 0$ это имеет место в области $0 < x < l$, $t > 0$. Подставляя (3.20) и (3.21) в уравнение (1.2), убеждаемся, что функция $u(x,t)$, определяемая рядом (3.14), является в области $0 < x < l$, $t > 0$ его решением. □

References

[1] J. R. Cannon, “The solution of the heat equation subject to the specification of energy”, *Quart. Appl. Math.*, **21** (1963), 155–160.

[2] Н. И. Ионкин, “Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием”, *Дифференц. уравнения*, **13**:2 (1977), 294–304. [N. I. Ionkin, “The solution of a certain boundary value problem of the theory of heat conduction with a nonclassical boundary condition”, *Differ. Uravn.*, **13**:2 (1977), 294–304 (In Russian)].

[3] А. А. Самарский, “О некоторых проблемах теории дифференциальных уравнений”, *Дифференц. уравнения*, **16**:11 (1980), 1925–1935. [A. A. Samarskii, “Some problems of the theory of differential equations”, *Differ. Uravn.*, **16**:11 (1980), 1925–1935 (In Russian)].

[4] А. М. Нахушев, “Об одном приближенном методе решения краевых задач для дифференциальных уравнений и его приложения к динамике почвенной влаги и грунтовых вод”, *Дифференц. уравнения*, **18**:1 (1982), 72–81. [A. M. Nakhushev, “An approximate method for solving boundary value problems for differential equations and its application to the dynamics of ground moisture and ground water”, *Differ. Uravn.*, **18**:1 (1982), 72–81 (In Russian)].

[5] Л. И. Камынин, “Об одной краевой задаче теории теплопроводности с неклассическими граничными условиями”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **4**:6 (1964), 1006–1024; англ. пер.:L. I. Kamynin, “A boundary value problem in the theory of heat conduction with a nonclassical boundary condition”, *Comput. Math. Math. Phys.*, **4**:6 (1964), 33–59.

[6] Н. И. Юрчук, “Смешанная задача с интегральным условием для некоторых параболических уравнений”, *Дифференц. уравнения*, **22**:12 (1986), 2117–2126. [N. J. Yurchuk, “A mixed problem with an integral condition for some parabolic equations”, *Differ. Uravn.*, **22**:12 (1986), 2117–2126 (In Russian)].

[7] Бенуар Нур-Эддин, Н. И. Юрчук, “Смешанная задача с интегральным условием для параболических уравнений с оператором Бесселя”, *Дифференц. уравнения*, **27**:12 (1991), 2094–2098; англ. пер.:N. E. Benuar, N. J. Yurchuk, “A mixed problem with an integral condition for parabolic equations with a Bessel operator”, *Differ. Equ.*, **27**:12 (1991), 1482–1487.

[8] Л. А. Муравей, А. В. Филиновский, “Об одной параболической краевой задаче”, *Докл. АН СССР*, **317**:1 (1991), 39–43; англ. пер.:L. A. Muravei, A. V. Filinovskii, “A parabolic boundary value problem”, *Dokl. Math.*, **43**:2 (1991), 334–338.

[9] Л. А. Муравей, А. В. Филиновский, “Об одной задаче с нелокальным граничным условием для параболического уравнения”, *Матем. сб.*, **182**:10 (1991), 1479–1512; англ. пер.:L. A. Muravei, A. V. Filinovskii, “On a problem with nonlocal boundary condition for a parabolic equation”, *Sb. Math.*, **74**:1 (1993), 219–249.

[10] А. И. Кожанов, “О разрешимости краевой задачи с нелокальным граничным условием для линейных параболических уравнений”, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, **30** (2004), 63–69. [A. I. Kozhanov, “On the solvability of a boundary-value problem with a non-local boundary condition for linear parabolic equations”, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.]*, **30** (2004), 63–69 (In Russian)].

[11] A. Bouziani, “Mixed problem with boundary integral conditions for a certain parabolic equation”, *Journal of Applied Mathematics and Stochastic Analysis*, **9**:3 (1996), 323–330.

[12] S. Mesloub, A. Bouziani, “Mixed problem with a weighted integral condition for a parabolic equation with the Bessel operator”, *Journal of Applied Mathematics and Stochastic Analysis*, **15**:3 (2002), 277–286.

[13] A. Bouziani, T. E. Oussaeif, L. Ben Aoua, “A mixed problem with an integral two-space-variables condition for parabolic equation with the Bessel operator”, *Journal of Mathematics*, **2013** (2013), 1–8.

[14] Л. С. Пулькина, “Смешанная задача с интегральным условием для гиперболического уравнения”, *Матем. заметки*, **74**:3 (2003), 435–445; англ. пер.:L. S. Pulkina, “A mixed problem with integral condition for the hyperbolic equation”, *Math. Notes*, **74**:3 (2003), 411–421.

[15] Л. С. Пулькина, “Краевые задачи для гиперболического уравнения с нелокальными условиями I и II рода”, *Изв. вузов. Матем.*, 2012, № 4, 74–83; англ. пер.:L. S. Pul’kina, “Boundary value problems for a hyperbolic equation with nonlocal conditions of the I and II kind”, *Russian Math. (Iz. VUZ)*, **56**:4 (2012), 62–69.

[16] Л. С. Пулькина, “Нелокальная задача для гиперболического уравнения с интегральными условиями I рода с ядрами, зависящими от времени”, *Изв. вузов. Матем.*, 2012, № 10, 32–44; англ. пер.:L. S. Pul’kina, “A nonlocal problem for a hyperbolic equation with integral conditions of the 1st kind with time-dependent kernels”, *Russian Math. (Iz. VUZ)*, **56**:10 (2012), 26–37.

[17] С. А. Бейлин, “Об одной нелокальной задаче с интегральным условием”, *Матем. заметки ЯГУ*, **11**:2 (2004), 22—29. [S. A. Beilin, “On a nonlocal problem with an integral condition”, *Mat. Zamet. YAGU*, **11**:2 (2004), 22–29 (In Russian)].

[18] Н. В. Зайцева, *Смешанные задачи с интегральными условиями для гиперболических уравнений с оператором Бесселя*, Издательство Московского университета, М., 2021, 120 с. [N. V. Zaitseva, *Mixed Problems with Integral Conditions for Hyperbolic Equations with the Bessel Operator*, Moscow University Press, Moscow, 2021 (In Russian), 120 pp.]

[19] К. Б. Сабитов, “Краевая задача для уравнения параболо-гиперболического типа с нелокальным интегральным условием”, *Дифференц. уравнения*, **46**:10 (2010), 1468–1478; англ. пер.:K. B. Sabitov, “Boundary value problem for a parabolic-hyperbolic equation with a nonlocal integral condition”, *Differential Equations*, **46**:10 (2010), 1472–1481.

[20] К. Б. Сабитов, “Нелокальная задача для уравнения параболо-гиперболического типа в прямоугольной области”, *Матем. заметки*, **89**:4 (2011), 596–602; англ. пер.:K. B. Sabitov, “Nonlocal problem for a parabolic-hyperbolic equation in a rectangular domain”, *Math. Notes*, **89**:4 (2011), 562–567.

[21] Г. Н. Ватсон, *Теория бесселевых функций. Часть первая*, И.Л., М., 1949, 799 с.; англ. пер.:G. N. Watson, *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*, Cambridge University Press, New York, 1944, 799 pp.

[22] В. Я. Арсенин, *Методы математической физики и специальные функции*, Наука, М., 1984, 384 с. [V. Y. Arsenin, *Methods of Mathematical Physics and Special Functions*, Nauka Publ., Moscow, 1984 (In Russian), 384 pp.]

[23] Н. С. Кошляков, Э. Б. Глинер, М. М. Смирнов, *Уравнения в частных производных математической физики*, Высшая школа, М., 1970, 712 с. [N. S. Koshlyakov, E. B. Gliner, M. M. Smirnov, *Partial Differential Equations of Mathematical Physics*, Vysshaya Shkola Publ., Moscow, 1970 (In Russian), 712 pp.]

[24] Г. П. Толстов, *Ряды Фурье*, Наука, М., 1980, 384 с.; англ. пер.:G. P. Tolstov, *Fourier Series*, Dover, New York, 1976, 352 pp.

Информация об авторах

Гарипов Ильнур Бурханович, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики и математического моделирования. Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, Российская Федерация. E-mail: ilnur_garipov@mail.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-6463-3099

Мавлявиев Ринат Мизхатович, старший преподаватель кафедры высшей математики и математического моделирования. Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, Российская Федерация. E-mail: mavly72@mail.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-7493-3183

Information about the authors

Ilnur B. Garipov, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the High Mathematics and Mathematical Modeling Department. Kazan (Volga Region) Federal University, Kazan, Russian Federation. E-mail: ilnur_garipov@mail.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-6463-3099

Rinat M. Mavlyaviev, Senior Lecturer of the High Mathematics and Mathematical Modeling Department. Kazan (Volga Region) Federal University, Kazan, Russian Federation.
E-mail: mavly72@mail.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-7493-3183

Конфликт интересов отсутствует.

There is no conflict of interests.

Для контактов:
Гарипов Ильнур Бурханович
E-mail: ilnur_garipov@mail.ru

Corresponding author:
Ilnur B. Garipov
E-mail: ilnur_garipov@mail.ru

Поступила в редакцию 24.06.2022 г.
Поступила после рецензирования 29.08.2022 г.
Принята к публикации 13.09.2022 г.

Received 24.06.2022
Reviewed 29.08.2022
Accepted for press 13.09.2022